CentraleSupélec
Accelerated Engineering Degree Programme
Master's level

Nov. 2017

Written test - Mathematics

2 hours

Let $a > 0$. Recall that the improper integral of a function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ is defined as the limit of $\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ as x tends to $+\infty$. If this limit exists, $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ is said to converge (or to be convergent). If this limit does not exist, $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ is said to diverge (or to be divergent).

Let $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be two real, positive sequences. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are said to be equivalent if $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Q. 1 Let $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ and $h : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ two continuous and positive functions in the interval $[a, +\infty)$. Show that the functions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ and $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ are equivalent at $+\infty$ if the integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converges, and that the functions $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} g(t)\mathrm{d}t$ and $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} h(t)\mathrm{d}t$ are equivalent at $+\infty$ if the integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ diverges.

Let $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ be a function that is positive and continuously differentiable on $[a, +\infty)$. Furthermore, we assume that there exists $\alpha \in \mathbb{R}$ such that

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha.$$

Q. 2 Show that

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(f(x))}{\log x} = \alpha.$$

Q. 3 If $\alpha < 1$, show that the integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converges, and show that the functions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ and $x \mapsto -\dfrac{xf(x)}{\alpha+1}$ are equivalent at $+\infty$.

Q. 4 If $\alpha > 1$, show that the integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverges and show that the functions $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ and $x \mapsto \dfrac{xf(x)}{\alpha+1}$ equivalent at $+\infty$.

Q. 5 Choose 2 examples of functions f showing that, if $\alpha = -1$, the integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ may converge or diverge depending on the choice of f.

Q. 6 Give an example of a positive and continuously differentiable function $\varphi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ such that

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\varphi(x))}{\log(x)} = \alpha \neq -1$, and the integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ diverges,
- whereas the functions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ and $x \mapsto \dfrac{x\varphi(x)}{\alpha+1}$ are not equivalent at $+\infty$.

In the following, U is a series $\sum u_n$ where: $u_n > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ tends to $+\infty$ as n tends to $+\infty$. U is said to diverge (or to be divergent). We denote $s_{-1} = O$. Moreover, $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ is a continuous, positive, non-increasing function on $[0, +\infty[$ and V and V′ denote respectively the series $\sum u_n f(s_n)$ and $\sum u_n f(s_{n-1})$.

Q. 7 What can be said about V if the integral $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converges ? What can be said about V′ if this integral diverges ?

We assume in questions 8 to 11 that $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.

Q. 8 Explain how the convergence or the divergence of the series V and V′ imply the convergence or the divergence of $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Q. 9 If the series V′ diverges, are $\sum_{k=0}^n u_k f(s_{k-1})$ and $\sum_{k=0}^n u_k f(s_k)$ equivalent ?

Q. 10 If f is continuously differentiable on $[0, +\infty)$ with

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha < -1,$$

give, in terms of f, s_n and α, a simple sequence that is equivalent to the remainder $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k f(s_k)$ of V. Does the remainder $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k f(s_{k-1})$ of V′ have the same equivalent ?

Q. 11 If $f : x \mapsto e^{-x}$, give an example showing that V and V′ can be both convergent without their remainders at the same rank being equivalent.
bigskip

Assume from now on that the function $x \mapsto \dfrac{\log f(x)}{\log(x)}$ is nondecreasing in a neighborhood of ∞ and that the sequence $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded. There is no longer an assumption on the boundedness of the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q. 12 What is the sign of $\log f(x)$ in a neighborhhod of the infinity ?

Q. 13 For all couple (x, y) of large enough real numbers such that $x \le y$, show that

$$\log f(x) - \log f(y) \le \frac{\log f(x)}{\log x}(\log x - \log y).$$

Q. 14 Show that either V and V′ both converge, or they both diverge.

Q. 15 Moreover, if $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, give an equivalent of the sum to n $\sum_{k=0}^{n} u_k f(s_k)$ of V if V diverges and an equivalent of its remainder if V converges.

Q. 16 Are these equivalents correct for the sum to n of V′ if V diverges and of the remainder of V′ if V converges ?

Q. 17 Give equivalents of the sequences $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ if $\beta < 1$ and of $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ if $\beta \in (1,0)$, if we assume that the limit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n}$ is 1.

CentraleSupélec
Accelerated Engineering Degree Programme
Master's level

Nov. 2017

Épreuve écrite de Mathématiques

2 heures

Soit $a > 0$. On rappelle que l'intégrale impropre d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ est définie comme la limite de $\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$. Lorsque cette limite existe, on dit que $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge (ou est convergente). Lorsque la limite n'existe pas, on dit que $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ diverge (ou est divergente).

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ positives. On dit que f et g sont équivalentes en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Q. 1 *Soient $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $h : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et strictement positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Montrer que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ sont équivalentes en $+\infty$ si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, et que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$ sont équivalentes en $+\infty$ si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ diverge.*

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et continûment dérivable sur $[a, +\infty[$. On suppose en outre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha.$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(f(x))}{\log x} = \alpha.$$

Q. 3 *Si $\alpha < 1$, démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto -\dfrac{xf(x)}{\alpha+1}$ sont équivalentes en $+\infty$.*

Q. 4 *Si $\alpha > 1$, démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge et que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \dfrac{xf(x)}{\alpha+1}$ sont équivalentes en $+\infty$.*

Q. 5 *Montrer par deux exemples que, dans le cas où* $\alpha = -1$ *, l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *peut converger ou diverger selon le choix de* f*.*

Q. 6 *Donner un exemple d'une fonction* $\varphi : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *strictement positive et continûment dérivable sur* $[a, +\infty[$*, telle que*

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\varphi(x))}{\log(x)} = \alpha \neq -1$, *avec une intégrale* $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ *divergente*
- *alors que les fonctions* $x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ *et* $x \mapsto \frac{x\varphi(x)}{\alpha+1}$ *ne sont pas équivalentes en* $+\infty$*.*

Dans la suite, U désigne une série $\sum u_n$ où : $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On dit que U diverge (ou est divergente). On convient que $s_{-1} = 0$. De plus, $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, décroissante et strictement positive sur $[0, +\infty[$ et on note V et V′ respectivement les séries $\sum u_n f(s_n)$ et $\sum u_n f(s_{n-1})$.

Q. 7 *Que peut-on dire de la série* V *si lintégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *converge ? Que peut-on dire de la série* V′ *si cette intégrale diverge ?*

On suppose dans les questions 8 à 11 que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Q. 8 *Expliciter comment la convergence ou la divergence des séries* V *et* V′ *implique la convergence ou la divergence de* $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$*.*

Q. 9 *Dans le cas où la série* V′ *diverge,* $\sum_{k=0}^n u_k f(s_{k-1})$ *et* $\sum_{k=0}^n u_k f(s_k)$ *sont-elles équivalentes ?*

Q. 10 *Si* f *est continûment dérivable sur* $[0, +\infty[$ *avec*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha < -1,$$

déterminer à l'aide de f*, de* s_n *et de* α *une suite simple équivalente au reste* $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k f(s_k)$ *de* V*. Le reste* $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k f(s_{k-1})$ *de* V′ *admet-il le même équivalent ?*

Q. 11 *Dans le cas où* $f : x \mapsto e^{-x}$*, montrer par un exemple que les séries* V *et* V′ *peuvent être simultanément convergentes sans que leurs restes de même rang soient équivalents.*

Dans toute la suite, on suppose que la fonction $x \mapsto \frac{\log f(x)}{\log(x)}$ est croissante au voisinage de l'infini et que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est plus supposée bornée.

Q. 12 *Quel est le signe de* $\log f(x)$ *au voisinage de l'infini ?*

Q. 13 *Pour tout couple* (x, y) *de réels assez grands et tels que* $x \leq y$, *démontrer l'inégalité*

$$\log f(x) - \log f(y) \leq \frac{\log f(x)}{\log x}(\log x - \log y).$$

Q. 14 *Démontrer que soit les séries* V *et* V' *convergent toutes les deux, soient elles divergent toutes les deux.*

Q. 15 *Si de plus* $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, *trouver, à l'aide d'intégrales portant sur* f, *un équivalent à la somme de rang* n $\sum_{k=0}^{n} u_k f(s_k)$ *de* V *lorsque la série* V *diverge et un équivalent à son reste lorsqu'elle converge.*

Q. 16 *Ces équivalents conviennent-ils également pour la somme de rang* n *de* V' *dans le cas de la divergence de* V *et pour le reste de* V' *dans le cas de la convergence de* V *?*

Q. 17 *Trouver, lorsque* n *tend vers* $+\infty$, *des équivalents pour les suites* $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* $\beta < 1$ *et de* $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* $\beta \in]1, 0[$, *lorsque l'on suppose que la limite* $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}$ *est égale à* 1.