Identification : ______________________________

CentraleSupélec
Accelerated Engineering Degree Programme
Master's level

PHYSICS WRITTEN EXAM for physicists

November **2017**.

Duration : 2h No documents allowed. **Answers will be carefully explained and detailed.** Numerical values are important. They must be estimated every time it is possible and should be accompanied by a comment. No pocket calculator, telephone or computer are allowed. Answers must be given in the empty space below each question.

1 Observation of oil on the ocean (adapted from H& R)

A disabled tanker leaks kerosene into the Persian Gulf, creating a large slick on top of the water. Indices of refraction for kerosene and water in the visible range are assumed to be constant. The values are taken to be $n_k = 1.20$ and $n_w = 1.41$ for kerosene and water, respectively.

1. What is the frequency of an electromagnetic wave propagating in water with a wavelength of 500 nm ?

   Answer:

2. Suppose your are scuba diving and, from underneath the surface, trying to observe a plane passing by. What are the directions (pointing to the surface !) for which it will be hopeless for you to see the plane ? The angles will be given with reference to the vertical. Make a drawing and carefully describe how you obtained your numerical result.

   Answer:

3. You are looking straight down from an airplane, while the Sun is overhead, at a region of the slick where its thickness is 460 nm,
   (a) for which wavelength(s) of visible spectrum is the reflection brightest because of constructive interferences ?
   Answer:

   (b) What is the apparent color of the slick ?
   Answer:

4. You are now scuba diving directly under this same region of the slick.
   (a) For which wavelength(s) of visible spectrum is the transmitted intensity strongest ?
   Answer:

   (b) What is the apparent color of the slick ?
   Answer:

2 Quantum particles.

The questions are independent.

1. Let $\phi(x)$ be any wavefunction describing a particle in a one-dimension universe. Let $\widehat{x}$ be the position operator, acting on a wavefunction as $\widehat{x}\phi(x) = x\phi(x)$. Let $\widehat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ the momentum operator in position space representation.
   (a) Show that the commutator $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar\mathbb{1}$, where $\mathbb{1}$ is the identity operator.
   Answer:

   (b) Explain how this result is related to Heisenberg's inequalities.
   Answer:

   (c) Show that $\widehat{p}$ is a hermitian operator.
   Answer:

2. Let $\widehat{A}$ be an observable. Its eigenvalues and eigenkets are respectively denoted α_j and $|\phi_j\rangle$ with $j = 1, 2, 3, ...$ Show that if $|\psi\rangle$ is any state ket representing the current state of the system, $\langle\psi|\widehat{A}|\psi\rangle$ corresponds to the expected value of the observable $\widehat{A}$.
Answer:

3. Let the $\phi_j(x)$ be the eigenfunctions of Hamiltonian $\widehat{H}$ with the associated eigenenergies ε_j. For example, $\phi_0(x)$ and ε_0 are the ground state wavefunction and energy, respectively. The first excited state wavefunction and energy are respectively given by $\phi_1(x)$ and ε_1.
Suppose that, at time $t = 0$, the system is found to be in a state described by a wavefunction proportional to $\phi_0(x) + 2 \times \phi_1(x)$.
   (a) What is the wavefunction $\psi(x,t)$ describing the particle at time $t > 0$?
   Answer:

   (b) What is then the probability that the outcome of a measurement of the system energy is ε_0?
   Answer:

   (c) Comment on this result.
   Answer:

4. Consider a particle of mass m in an infinite quantum well, the width of which is a (still in one dimension). If the particle is in the eigenstate corresponding to an energy $\dfrac{8\hbar^2}{ma^2}$, what is the probability density of finding the particle exactly in the middle of the quantum well? A fully detailed explanation is expected.

Answer:

3 Compton scattering and its applications.

A.H. Compton is one of the founding fathers of quantum mechanics. We are considering his famous experiment and try to interpret why such a technique is still in use today. In the proposed treatment, the electron is not relativistic. Its kinetic energy is simply given by $p^2/(2m)$. Consider a free electron with momentum $\vec{p}_i$ and a photon corresponding to an electromagnetic wave with the wavevector $\vec{k}_1$. Suppose they collide, just like billiard balls. The final momentum for the electron is denoted $\vec{p}_f$ and the final wavevector for the outgoing photon is $\vec{k}_2$.

1. Write the momentum and energy conservation equations (in a vacuum) for the two-particle system.
   Answer:

2. Let the "scattering vector" be defined by $\vec{Q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$. Give an expression of the final kinetic energy of the electron as a function of its initial kinetic energy, a projection of the electron initial momentum on the scattering vector, the mass of the electron, the norm of the scattering vector and the "scattering angle", i.e. the angle θ between the incoming and the scattered photon wave-vectors.
   Answer:

3. The z axis is chosen along $\vec{Q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$. The change in the norm of the photon momentum is assumed to be small enough so that $\vec{Q} \approx 2k_1|\sin\theta/2|\vec{u}_z$ where $\vec{u}_z$ is a unit vector along the z axis. Show that the change of the radiation wavelength can be estimated to :

$$\lambda_2 - \lambda_1 \approx a\sin^2\theta/2 + b\lambda_1 p_{i,z}|\sin\theta/2|$$

where $p_{i,z}$ is the projection of the initial momentum of the electron along the z axis. Quantities a and b will be determined.
Answer:

4. Explain clearly what the measurement of a change in the scattered photon wavelength can teach us about the electron in the target.
Answer:

5. What are the optimal experimental conditions ? Provide any detailed explanation you think is appropriate.
Answer:

4 Formula

You might found useful some of these values and expressions :

— Mass of the electron : $m_e \approx 10^{-30}$ kg
— Mass of the proton : $m_p \approx 10^{-27}$ kg
— Mass of the Sun : $M_\odot \approx 1,9891.10^{30}$ kg
— Mass of the Moon : $m_L \approx 7,35 \times 10^{22}$ kg
— Mass of the Earth : $M_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg
— Earth magnetic field at Clermont-Ferrand : $B_T \approx 47\mu$T
— Electron charge : $q_e = -e = -1,6.10^{-19}$ C
— Molar mass for oxygen : $A \approx$16 g/mol
— Molar mass for carbon : $A \approx$12 g/mol
— Molar mass for gold : $A =$197 g/mol
— Avogadro number (number of particles per mole) : $N_A = 6,02.10^{23}$
— Boltzmann constant : $k_B \approx 1,4.10^{-23}$ J.K^{-1}
— Planck constant : $\hbar = h/(2\pi) \approx 10^{-34}$ J.s.
— Height of the Eiffel Tower : $h_{TE} = 324$ m (antenne comprise)
— Earth-moon distance : $R_{T-L} \approx 3,84 \times 10^8$ m
— Gravitational constant : $G \approx 6,67 \times 10^{-11}$m^{3}kg^{-1}s^{-2}
— Vacuum magnetic permitivity $\mu_0 \approx 4\pi 10^{-7}$T m/A
— Gyromagnetic ratios :
  * electron : $\gamma_e \approx -1,76 \times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1},
  * proton : $\gamma_p \approx 267,5 \times 10^6$ rad s^{-1} T^{-1},
  * neutron : $\gamma_n \approx 183 \times 10^6$ rad s^{-1} T^{-1},
  * deuton : $\gamma_d \approx 41 \times 10^6$ rad s^{-1} T^{-1}
— Schrödinger equation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)$$

— Kinetic energy operator : $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
— Creation operator $\widehat{a}^\dagger = \frac{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}}{\sqrt{2}}$ with $\widehat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
— Anihilation operator $\widehat{a} = \frac{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}}{\sqrt{2}}$ with $\widehat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
— Rotation kinetic energy for a rigid body with inertia momentum I and angular momentum $\vec{L}$: $E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I}$
— Relationship between the magnetic moment and the angular momentum : $\vec{\mu} = \gamma\vec{L} + 2\gamma\vec{S}$ with γ, the gyromagnetic momentum of the particle.
— Expression for the correction to the eigenenergy to the second order for a perturbation $\widehat{W}$: $\sum_{i\neq j}\frac{\left|\langle\phi_i|\widehat{W}|\phi_j\rangle\right|^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$
— Expression for the correction to the eigenstate to the first order for a perturbation $\widehat{W}$: $\sum_{i\neq j}\frac{\langle\phi_j|\widehat{W}|\phi_i\rangle}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}|\phi_j\rangle$
— Dipole from a set of point charges : $\vec{D} = \sum_i q_i\vec{r}_i$
— Force, $\vec{f}(\vec{r},t)$, deriving from a potential, $V(\vec{r},t)$: $\vec{f}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot V(\vec{r},t)$
— Also note that : $\int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx = n!$

Identification : ______________________________

CentraleSupélec
Accelerated Engineering Degree Programme
Master's level

TEST de physique écrit (pour physiciens)

Novembre **2017**.

Durée : 2h Sans document. **Les réponses seront clairement argumentées et détaillées.** Les valeurs numériques sont importantes. Elles devront évaluées, dès que cela est possible, et être accompagnées d'un commentaire. Aucune calculatrice, téléphone ou ordinateur. Les réponses seront données dans les espaces vides sous chaque question.

1 Observation de pétrole sur l'océan (adapté de H& R)

Un pétrolier en panne laisse fuir du kérosène dans le golfe Persique, créant ainsi une grande nappe à la surface de l'eau. Les indices de réfraction pour le kérosène et l'eau dans le domaine visible sont supposés constants. Les valeurs seront considérées être pour le kérosène $n_k = 1.20$ et pour l'eau $n_w = 1.41$.

1. Quelle est la fréquence d'une onde électromagnétique se propageant dans l'eau avec une longueur d'onde de 500 nm ?

   Réponse :

2. Supposez que vous fassiez de la plongée sous-marine et que, depuis votre position sous la surface, vous tentiez d'observer un avion passant à proximité. Quelles sont les directions (vers la surface !) pour lesquelles il est sans espoir que vous puissiez voir l'avion ? Les angles seront donnés par rapport à la verticale à la surface. Faire un dessin et décrire minutieusement comment le résultat numérique est obtenu.

   Réponse :

3. Vous vous trouvez dans un avion avec le soleil au dessus de vous et regardez la surface de l'océan (donc vers le bas) une région où l'épaisseur de la flaque est de 460 nm.
   (a) Pour quelle(s) longueur(s) d'onde du spectre visible la réflexion est-elle la plus brillante du fait des interférences constructives ?

   Réponse :

   (b) Quelle est alors la couleur apparente de la tache ?

   Réponse :

4. Vous observez maintenant cette même région de la flaque depuis le dessous (alors que vous pratiquez de nouveau la plongée sous-marine).
   (a) Pour quelle(s) longueur(s) d'onde du spectre visible l'intensité lumineuse transmise est-elle la plus forte ?

   Réponse :

   (b) Quelle est alors la couleur apparente ?

   Réponse :

2 Particules quantiques

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\phi(x)$ une fonction d'onde quelconque décrivant une particule dans un espace à une dimension. Soit $\widehat{x}$ l'opérateur position qui agit sur une fonction d'onde quelconque selon $\widehat{x}\phi(x) = x\phi(x)$. Soit $\widehat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ l'expression de l'opérateur impulsion lorsqu'il agit dans l'espace des positions (c'est-à-dire en représentation position).
   (a) Montrer que le commutateur $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar\mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité.
   Réponse :

   (b) Expliquer comment ce résultat est relié aux inégalités de Heisenberg.
   Réponse :

   (c) Montrer que $\widehat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ est un opérateur hermitien.
   Réponse :

2. Soit $\widehat{A}$ une observable. Ses valeurs propres et kets propres sont respectivement notés ε_j et $|\phi_j\rangle$ avec $j = 1, 2, 3, ...$ Montrer que si $|\psi\rangle$ est un ket quelconque représentant l'état actuel du système, $\langle\psi|\widehat{H}|\psi\rangle$ correspond à l'espérance de l'observable $\widehat{H}$.
Réponse :

3. Soit $\phi_j(x)$ les fonctions propres d'un Hamiltonien $\widehat{H}$ correspondant aux énergies propres ε_j. Par exemple $\phi_0(x)$ et ε_0 sont respectivement la fonction d'onde et l'énergie de l'état fondamental. La fonction d'onde propre et l'énergie du premier état excité sont respectivement $\phi_1(x)$ et ε_1. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le système soit mesuré dans un état décrit par une fonction d'onde proportionnelle à $\phi_0(x) + 2 \times \phi_1(x)$.
   (a) Quelle est la fonction d'onde $\psi(x, t)$ décrivant la particule à l'instant $t > 0$?
   Réponse :

   (b) Quelle est la probabilité que le résultat d'une mesure de l'énergie du système soit alors ε_0 ?
   Réponse :

   (c) Commentez ce dernier résultat.
   Réponse :

4. Soit une particule de masse m plongée dans un puits de potentiel infini (à une dimension) dont la largeur est a. Si la particule est dans un état correspondant à une énergie propre $\dfrac{8\hbar^2}{ma^2}$, quelle est la densité de probabilité de trouver cette particule exactement au centre du puits infini ? Une explication détaillée est demandée.

   Réponse :

3 Diffusion Compton et ses applications.

A.H. Compton est un des pères fondateurs de la mécanique quantique. Considérons sa célèbre expérience et tentons d'identifier pourquoi une telle technique est toujours utilisée aujourd'hui. Dans le traitement qui est ici proposé, l'électron n'est pas relativiste. Son energie cinétique est simplement donnée par $p^2/(2m)$.
Soit un électron libre dont l'impulsion (quantité de mouvement) est $\vec{p}_i$ et un photon correspondant à une onde électromagnétique de vecteur d'onde $\vec{k}_1$. Nous supposons qu'ils entrent alors en collision, tout comme des boules de billard. L'impulsion finale de l'électron est notée $\vec{p}_f$ et le vecteur d'onde du photon ressortant est $\vec{k}_2$.

1. Ecrire les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie (dans le vide) pour le système constitué des deux particules.
   Réponse :

2. Soit le "vecteur diffusion" $\vec{Q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$. Donner l'expression de l'énergie cinétique finale de l'électron en fonction de son énergie cinétique initiale, une projection de l'impulsion initiale de l'électron sur le vecteur diffusion, la masse de l'électron, la norme du vecteur diffusion et de "l'angle de diffusion", c'est à dire l'angle θ entre les vecteurs d'onde des photons incident et diffusé.
   Réponse :

3. L'axe z est choisi le long du vecteur $\vec{Q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$. Le changement de la norme de l'impulsion du photon est suffisamment faible pour que l'on puisse écrire $\vec{Q} \approx 2k_1|\sin\theta/2|\vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire le long de l'axe z. Montrer que le changement de longueur d'onde du rayonnement peut être estimé par :

$$\lambda_2 - \lambda_1 \approx a\sin^2\theta/2 + b\lambda_1 p_{i,z}|\sin\theta/2|$$

où $p_{i,z}$ est la projection de l'impulsion initiale de l'électron sur l'axe z. Les quantités a et b devront être déterminées.

Réponse :

4. Expliquer clairement ce que la mesure du changement de longueur d'onde du photon ainsi diffusé peut nous apprendre sur l'électron dans la cible.

Réponse :

5. Quelles sont les conditions expérimentales optimales ? Fournir toute explication détaillée que vous pensez appropriée.

Réponse :

4 Formulaire

Les valeurs et expressions suivantes peuvent vous être utiles :

— Masse de l'électron : $m_e \approx 10^{-30}$ kg
— Masse du proton : $m_p \approx 10^{-27}$ kg
— Masse du Soleil : $M_{\odot} \approx 1,9891.10^{30}$ kg
— Masse de la Lune : $m_L \approx 7,35 \times 10^{22}$ kg
— Masse de la Terre : $M_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg
— Champ magnétique terrestre à Clermont-Ferrand : $B_T \approx 47\mu$T
— Masse molaire de l'oxygène : $A \approx$16 g/mol
— Masse molaire du carbone : $A \approx$12 g/mol
— Masse molaire de l'or : $A =$197 g/mol
— Nombre d'Avogadro (nombre d'atomes par mole) : $N_A = 6,02.10^{23}$
— Constante de Boltzmann : $k_B \approx 1,4.10^{-23}$ J.K^{-1}
— Constante de Planck (réduite) : $\hbar \approx .10^{-34}$ J.s
— Hauteur de la Tour Eiffel : $h_{TE} = 324$ m (antenne comprise)
— Distance Terre Lune : $R_{T-L} \approx 3,84 \times 10^8$ m
— Constante gravitationnelle : $G \approx 6,67 \times 10^{-11}$m^{3}kg^{-1}s^{-2}
— perméabilité magnétique du vide $\mu_0 \approx 4\pi 10^{-7}$T m/A
— Quelques rapports gyromagnetiques.
  * Electron : $\gamma_e \approx -1,76 \times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1},
  * proton : $\gamma_p \approx 267,5 \times 10^6$ rad s^{-1} T^{-1},
  * neutron : $\gamma_n \approx 183 \times 10^6$ rad s^{-1} T^{-1},
  * deuton : $\gamma_d \approx 41 \times 10^6$ rad s^{-1} T^{-1}
— Equation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)$$

— Opérateur énergie cinétique : $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
— Opérateur création $\widehat{a}^\dagger = \frac{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}}{\sqrt{2}}$ tel que $\widehat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
— Opérateur anihilation $\widehat{a} = \frac{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}}{\sqrt{2}}$ tel que $\widehat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
— Charge de l'électron : $q_e = -e = -1,6.10^{-19}$ C
— Énergie cinétique de rotation d'un corps rigide de moment d'inertie I et de moment cinétique $\vec{L}$: $E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I}$
— Relation entre moment magnétique et moment cinétique : $\vec{\mu} = \gamma\vec{L} + 2\gamma\vec{S}$ avec γ, le rapport gyromagnétique de la particule.
— Expression de la correction à l'énergie au second ordre pour une perturbation $\widehat{W}$: $\sum_{i \neq j} \frac{\left|\langle\phi_i|\widehat{W}|\phi_j\rangle\right|^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$
— Expression de la correction à l'état propre au premier ordre pour une perturbation $\widehat{W}$: $\sum_{i \neq j} \frac{\langle\phi_j|\widehat{W}|\phi_i\rangle}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}|\phi_j\rangle$
— Dipole d'une distribution de charges ponctuelles : $\vec{D} = \sum_i q_i\vec{r}_i$
— Force, $\vec{f}(\vec{r},t)$, dérivant d'un potentiel, $V(\vec{r},t)$: $\vec{f}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot V(\vec{r},t)$
— On a aussi : $\int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx = n!$